Calcul I, Leçon 7 - Dérivées supplémentaires

Cette leçon continue avec les règles relatives à la différenciation des produits et quotients.

Nous allons d'abord déterminer $\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]$, ou $\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)^{'}$ lorsque les fonctions $f\left(x\right)$ et $g\left(x\right)$ sont deux fonctions dérivables (c'est-à-dire $f^{'}\left(x\right)$ et $g^{'}\left(x\right)$ existent).

Ainsi, pour trouver $\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]$, nous commençons par revenir à la définition de la dérivée, ainsi $\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$.

Nous pouvons certainement soustraire et ajouter x $f\left(x+h\right)g\left(x\right)$ dans le numérateur.
Ainsi, $\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f\left(x+h\right)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g\left(x\right)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right].$$

Maintenant, rappelez le Théorème de la Limite dans la leçon 3.
Selon la propriété de limites, si $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$ existe avec
$\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=L$ et $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)$ existe avec $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=M$, puis
(i) $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=L+M$ et $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]=L-M$.

Depuis la limite d'une somme est la somme des limites, puis
$\lim\limits_{h\to 0}\left[f\left(x+h\right)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g\left(x\right)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=$
$\lim\limits_{h\to 0}\left[f\left(x+h\right)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+\lim\limits_{h\to 0}\left[g\left(x\right)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$.

Pour en revenir à la leçon 3 et le Théorème de la Limite,
si $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$ existe avec $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=L$ et $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)$ existe avec $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=M$, puis
(iii) $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=LM$

Depuis la limite d'un produit est le produit des limites distinctes, puis
$\lim\limits_{h\to 0}\left[f\left(x+h\right)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=\lim\limits_{h\to 0}f\left(x+h\right)\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, et
$\lim\limits_{h\to 0}\left[g\left(x\right)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=\lim\limits_{h\to 0}g\left(x\right)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Depuis f et g sont des fonctions différentiable, puis par définition,
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df(x)}{dx}$, et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{dg(x)}{dx}$.

Depuis que nous avons dit que f est diffentiable à x, alors f est aussi continue à x, et donc $\lim\limits_{h\to 0}f\left(x+h\right)=f\left(x\right)$.
Aussi, $\lim\limits_{h\to 0}g\left(x\right)=g\left(x\right)$ puisque $g\left(x\right)$ ne dépend pas de h.

Ainsi, tous ensemble, par substitution,
$\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]=f\left(x\right)\frac{dg(x)}{dx}+g\left(x\right)\frac{df(x)}{dx}$.

Exemple 1. (application de la règle du produit pour les produits dérivées)
Calculez $f^{'}(x)$ si $f(x) = \left(5x^3 + 7x^2 + 1\right)(2x + x + 1)$.
Bien qu'il soit possible de multiplier les deux polynômes et de calculer la dérivée, au lieu, nous appliquerons la règle du produit. Ainsi
$\frac{d}{dx}\left[\left(5x^3 + 7x^2 + 1\right)\left(2x^2 + x + 1\right)\right]$
$= \left(5x^3 + 7x^2 + 1\right)\frac{d\left[2x^2+x+1\right]}{dx} + \left(2x^2 + x + 1\right)\frac{d\left[5x^3+7x^2+1\right]}{dx}$
$= \left(5x^3 + 7x^2 + 1\right)(4x + 1) + \left(2x^2 + x + 1\right)\left(15x^2 + 14x\right)$.

Nous pouvons utiliser une preuve similaire pour déterminer la dérivée de quotients, $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}$ lorsque les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ peuvent être différenciés et $g(x) \neq 0$ (parce que la division par 0 n'est pas défini).

Par définition, $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$.
Nous avons d'abord simplifier et combiner les fractions dans le numérateur:
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right)$.

Ensuite, nous soustraire et ajouter $f(x)\,g(x)$ dans le numérateur:
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x)}{g(x+h)g(x)}\right)$.

Ensuite, nous tenir compte de ce et de multiplier par $\frac{1}{h}$ dans le numérateur:
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(x)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)-f(x)\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x+h)g(x)}\right)$.

Maintenant, rappelez leçon 3 .
Le Théorème de la Limite fera le calcul des limites simples. Par le Théorème de la Limite: Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe avec $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, puis
(i) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) + g(x)\right] = L + M$ et $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) - g(x)\right] = L - M$
(ii) $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot L$ où c est une constante
(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = LM$
(iv) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ à condition que $M \neq 0$.
Puis en raison de la limite de sommes est la somme des limites, la limite de produits est le produit des limites, et la limite des quotients est le quotient de limites, puis
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(x)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)-f(x)\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x+h)g(x)}\right)$
$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} g(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)-\lim\limits_{h\to 0} f(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)\lim\limits_{h\to 0} g(x)}$.

Mais nous savons que puisque g est différentiable à x, g est aussi continue à x, et donc $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$.

Aussi, $\lim\limits_{h\to 0} g(x) = g(x)$ puisque $g(x)$ ne dépend pas de h, et $\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x)$ puisque $f(x)$ ne dépend pas de h.

Ainsi $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) - f(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x)g(x)}$.

Enfin, puisque f et g sont des fonctions différentiables, alors
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}$, et
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{dg(x)}{dx}$.

Ainsi, $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{(g(x))^2}$.

Exemple 2. (application de la règle du quotient pour les dérivées)
Calculez $f'(x)$ si $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-7}$.
Ainsi application de la règle du quotient nous donne

$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3+1}{x^2-7}\right] = \frac{\left(x^2-7\right)\frac{d\left[x^3+1\right]}{dx} - \left(x^3+1\right)\frac{d\left[x^2-7\right]}{dx}}{(x^2-7)^2}$
$= \frac{\left(x^2-7\right)\left(3x^2\right) - \left(x^3+1\right)(2x)}{(x^2-7)^2} = \frac{3x^4-21x^2-2x^4-2x}{(x^2-7)^2}$
$= \frac{x^4-21x^2-2x}{(x^2-7)^2}$

Exercices

Utilisez les règles ci-dessus à trouver la dérivée pour chaque fonction de x ou t.

1. $f(x) = \left(x^5+3x\right)\left(x^2+2\right)$
2. $g(x) = \left(7x+3x^{-1}\right)\left(x^3+1\right)$
3. $f(t) = \frac{3-t}{t-7}$
4. $g(t) = \frac{1}{3t^2+1}$

Souvent, les solutions aux problèmes scientifiques impliquent des équations différentielles, ce qui signifie équations contenant des dérivées. En cas de problèmes 5 et 6, s'il vous plaît vérifier que l'équation de y est une solution à l'équation différentielle donnée en substituant la fonction y dans l'équation différentielle et en montrant que l'équation est satisfaite.

5. $y = x^2$ et $xy' - 2y = 0$
6. $y = kx^{-1} + 3x$ et $y + xy' = 6x$ ou k est une constante