Calculus I, Leçon 6 - Dérivées supplémentaires

Nous allons maintenant tourner notre attention vers le dévelopment de certaines règles générales applicables au calculus des dérivées.

Tout d'abord, nous allons étudier la relation de différenciation par rapport aux opérations d'addition et de soustraction. La règle pour l'addition est très simple: la dérivée de la somme de deux fonctions est la somme des dérivées distincts. Ainsi, si $\frac{df(x)}{dx}$ et $\frac{dg(x)}{dx}$ existe, alors $\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]$ existe et $\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$.
La même chose est vraie pour la soustraction, si nous faisons le changement approprié dans les signes: $\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx}$.

Théorème 6.1: Si les fonctions f et g sont des fonctions différentiables, puis $\frac{d}{dx}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\frac{df(x)}{dx}\pm\frac{dg(x)}{dx}$.

Dans l'exemple 1 dans la sixième leçon, ici est un fait que vous connaissez déjà.
Théorème 6.2: Si c est une constante, puis $\frac{dc}{dx}=0$.

Théorème 6.3: Si la fonction f est différentiable, et c est une constante, puis $\frac{d}{dx}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\frac{df(x)}{dx}$.

Considérez la dérivée de $f(x)=x^n$ where n est un nombre entier positif.
Pour $n=1$, puis laissez $f(x)=x$.
Puis $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.

Maintenant, pour $n=2$, puis laissez $f(x)=x^2$.

$$\begin{aligned}\text{Puis } f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2\right)-\left(x^2\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\left(x^2+2xh+h^2\right)\right)-\left(x^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x^2+2xh+h^2\right)-\left(x^2\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $n=3$, puis laissez $f(x)=x^3$.

$$\begin{aligned}\text{Puis } f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^3\right)-\left(x^3\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)\right)-\left(x^3\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $n=n$, puis laissez $f(x)=x^n$.
Nous savons par le théorème du binôme,
http://www.wtamu.edu/academic/anns/mps/math/mathlab/col_algebra/col_alg_tut54_bi_theor.htm,
que $(x+h)^n=x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}h^3x^{n-3}+\cdots+h^n$.
Nous observons que tous les termes après le second terme impliquent h à la puissance deuxième ou plus.

Puis $f^{'}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{((x+h)^n)-(x^n)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\left(x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-3)}{3\cdot 2}h^3x^{n-3}+\cdots+h^n\right)\right)-(x^n)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-3)}{3\cdot 2}h^3x^{n-3}+\cdots+h^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-3)}{3\cdot 2}h^2x^{n-3}+\cdots+h^{n-1}\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-3)}{3\cdot 2}h^2x^{n-3}+\cdots+h^{n-1}\right)$$
$$= nx^{n-1}.$$

Théorème 6.4: Si n est un nombre entier positif, puis $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$.

Nous allons maintenant résumer les règles que nous avons apprises à ce jour:
1) $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$
2) $\frac{dc}{dx} = 0$ si c est une constante
3) $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{df(x)}{dx}$ si c est une constante
4) $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ si n est un nombre entier positif.

Exemple 1.
Laissez $f(x) = x^{10}$. Puis $f^{'}(x) = 10x^9$.

Exemple 2.
Laissez $f(x) = 4.5x^4$. Puis $f^{'}(x) = 4.5\left(4x^3\right) = 18x^3$.

Exemple 3.
Laissez $f(x) = x^4 - 12x^3$. Puis $f^{'}(x) = 4x^3 - 12\left(3x^2\right) = 4x^3 - 36x^2$.

Exemple 4.
Laissez $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 24x + 5$.
Puis $f^{'}(x) = 2\left(3x^2\right) - 6(2x) + 24(1) + 0 = 6x^2 - 12x + 24$.

Exercices
Utilisez les règles ci-dessus à trouver la dérivée pour chaque fonction de x ou t.

1. $f(x) = -x + 3x^2$
2. $g(x) = 6x^2 - 15x^4$
3. $f(x) = 7 + \frac{\pi}{2}$
4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3$
5. $g(t) = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$
6. $f(t) = t^4\left(1 - 2t + t^2\right)$