Calcul I, Leçon 5 - Dérivées

Voici les réponses aux exercices

1. $f(x) = x + 3$

Laissez $f(x) = x + 3$.

Puis $f^{'}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{((x+h)+3)-(x+3)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h+3)-(x+3)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$

2. $g(x) = x^2$

Laissez $g(x) = x^2$.

Puis $g^{'}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^2\right)-\left(x^2\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left(x^2+2xh+h^2\right)-\left(6x^2\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (2x+h) = 2x.$

3. $f(x) = \frac{\pi}{2}$

Laissez $f(x) = 7$.

Puis $f^{'}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

4. $f(x) = x^3$

Laissez $f(x) = x^3$.

Puis $f^{'}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^3+3\right)-\left(x^3\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)-\left(x^3\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2$

5. $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Laissez $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Puis $g^{'}(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{t+h}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+h}}{h\left(\sqrt{t+h}\right)\left(\sqrt{t}\right)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+h}}{h\left(\sqrt{t+h}\right)\left(\sqrt{t}\right)} \cdot \frac{\sqrt{t}+\sqrt{t+h}}{\sqrt{t}+\sqrt{t+h}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{t-(t+h)}{\left(h\left(\sqrt{t+h}\right)\left(\sqrt{t}\right)\right)\left(\sqrt{t}+\sqrt{t+h}\right)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-h}{h} \cdot \frac{1}{t\left(\sqrt{t+h}\right)+(t+h)\sqrt{t}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{t\left(\sqrt{t+h}\right)+(t+h)\sqrt{t}}$

$= \frac{-1}{t\left(\sqrt{t}\right)+(t)\sqrt{t}} = \frac{-1}{2t\left(\sqrt{t}\right)} = -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$

6. $g(x) = \frac{2}{x}$

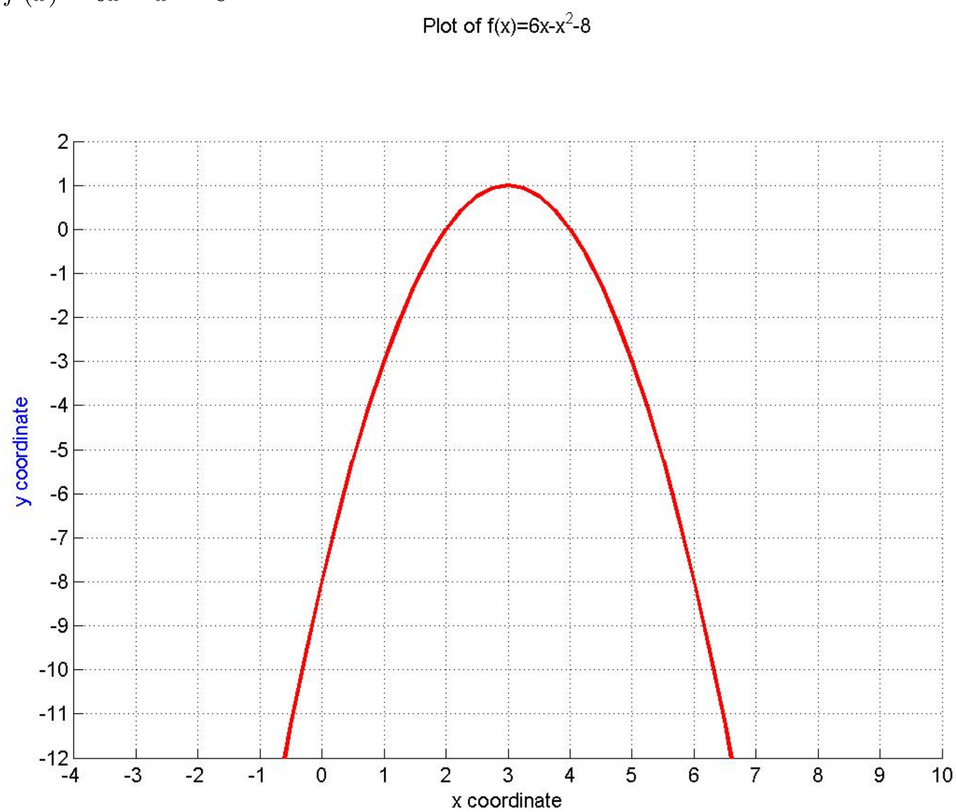
Laissez $g(x) = \frac{2}{x}$.

Puis $g^{'}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{2}{x+h}\right)-\left(\frac{2}{x}\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(2x)-(2x+2h)}{(x)(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-2h}{(x)(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(x)(x+h)}$$
$$= \frac{-2}{(x)(x)} = \frac{-2}{x^2} = -2x^{-2}$$

Tracez le graphique de $f(x)$ et déterminer $f^{'}(x)$ à la plus grande valeur de la fonction.

7. $f(x) = 6x - x^2 - 8$



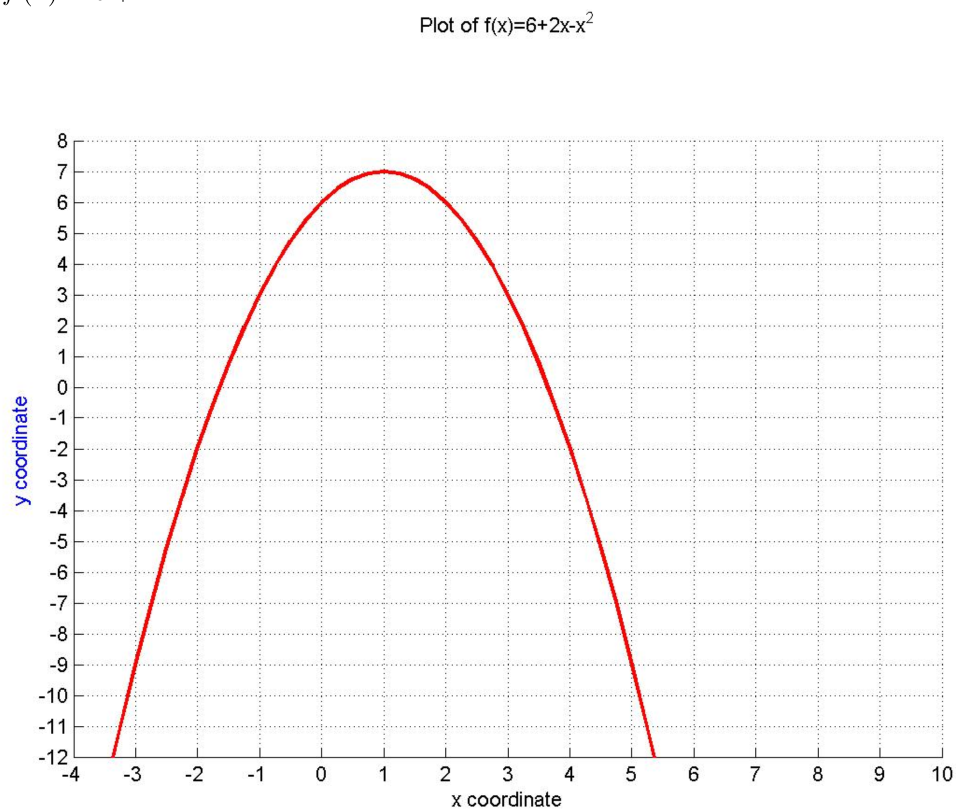

Laissez $f(x) = 6x - x^2 - 8$.

Puis $f^{'}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(6(x+h)-(x+h)^2-8\right)-\left(6x-x^2-8\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(6x+6h-x^2-2xh-h^2-8\right)-\left(6x-x^2-8\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h-2xh-h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(6-2x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} 6-2x-h$$
$$= 6-2x$$

Depuis $f(x)$ a sa valeur maximale à $x=3$, puis $f'(3) = 6-2\cdot 3 = 0$.

8. $f(x) = 6+2x-x^2$




Laissez $f(x) = 6+2x-x^2$.

Puis $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(6+2(x+h)-(x+h)^2\right)-\left(6+2x-x^2\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(6+2x+2h-x^2-2xh-h^2\right)-\left(6+2x-x^2\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h-2xh-h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2-2x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2-2x-h$$
$$= 2-2x$$

Depuis $f(x)$ a sa valeur maximale à $x=1$, puis $f'(1) = 2-2\cdot 1 = 0$.