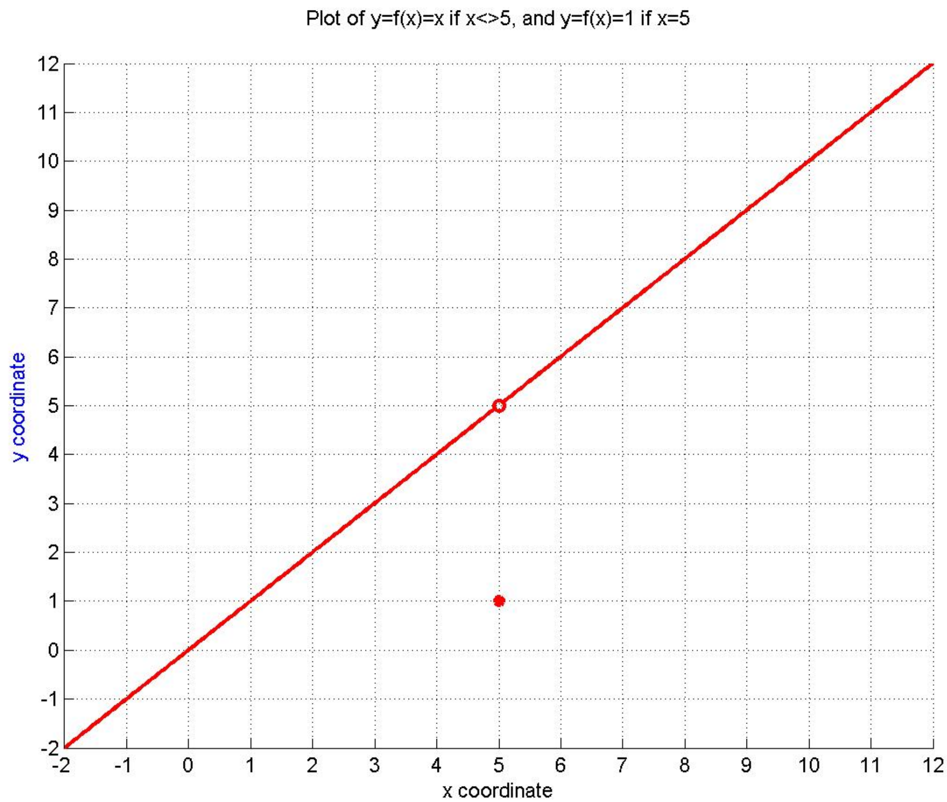
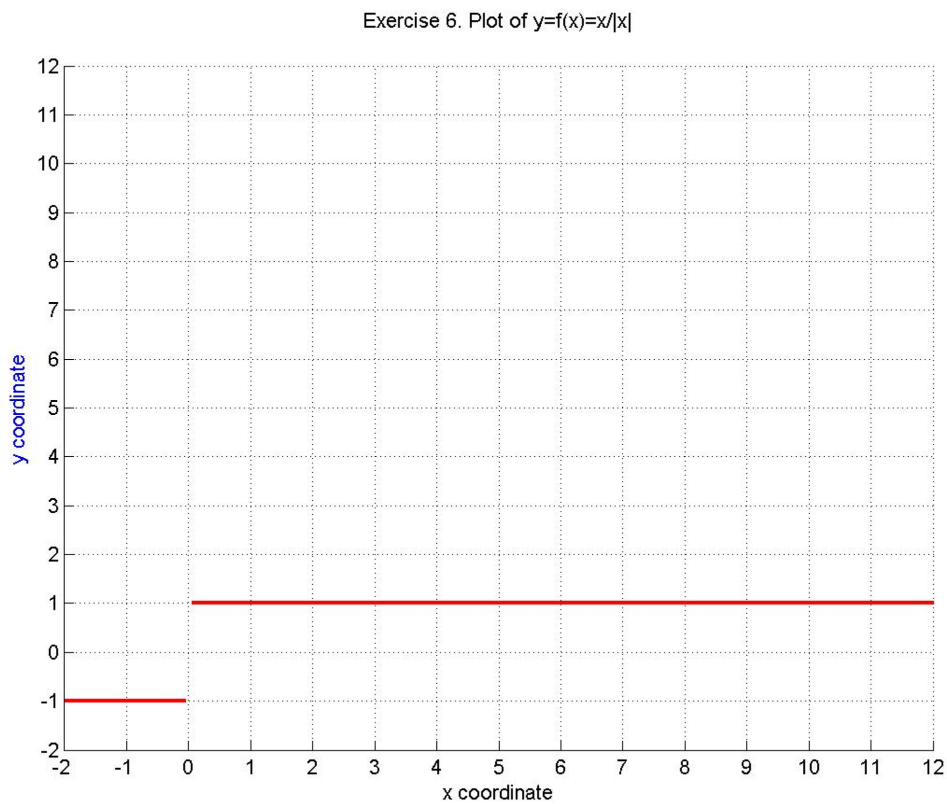
Calcul I, Leçon 4 - Continuité

Si l'on esquisse un graphique d'une fonction, et il n'ya pas de ruptures dans le graphique, la fonction est appelée continue. Si vous tracez un graphique continu avec un crayon, vous n'aurez jamais à lever le crayon le papier afin de tracer la courbe. Regardez le graphique ci-dessous:



Le graphique présente une rupture au point $x = 5$; nous disons que le graphe est discontinue à 5. Voici une autre fonction discontinue:



Le graphique présente une rupture au point $x = 0$. En fait, parce que la division par zéro est pas défini, la fonction n'a pas de valeur à $x = 0$! En d'autres termes, $f(0)$ ne existent pas.

Pour définir la continuité exactement, notez que pour que le graphe d'une fonction de ne pas faire une pause au point a, les suivantes sont requises:
i) f est défini à a, c'est-à-dire $f(a)$existe, et
ii) les valeurs de x à proximité de a, produire des valeurs de $f(x)$ proche de $f(a)$; c'est-à-dire $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

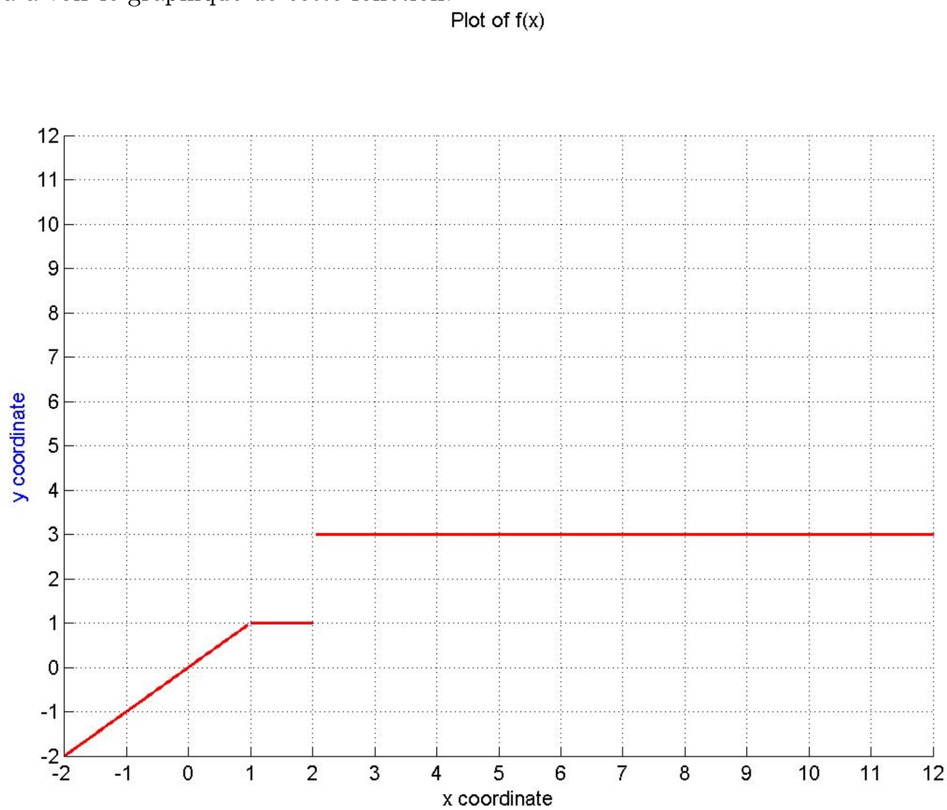
Exemple 1: Examiner la continuité de $f(x) = x + 3$ au point $x = 3$.
Rappelez-vous, il ya deux essais.
Depuis $f(3) = x + 3 = 3 + 3 = 6$, clairement $f(3)$ existe.
Aussi $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(x + 3) = 6 = f(3)$. Ainsi $f(x)$ est continue en $x = 3$.

Exemple 2: Examiner la continuité de$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-3}$ au point $x = 3$.
Rappelez-vous, il ya deux essais.
Depuis $f(3) = \frac{0}{0}$ n'est pas défini, alors $f(3)$ n'existe pas.
Donc, il est impossible pour$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$. Ainsi $f(x)$ est discontinue en $x = 3$.

Exemple 3: Examiner la continuité de

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \text{ en des points } x = 1 \text{ et } x = 2.$$

Il aidera à voir le graphique de cette fonction.



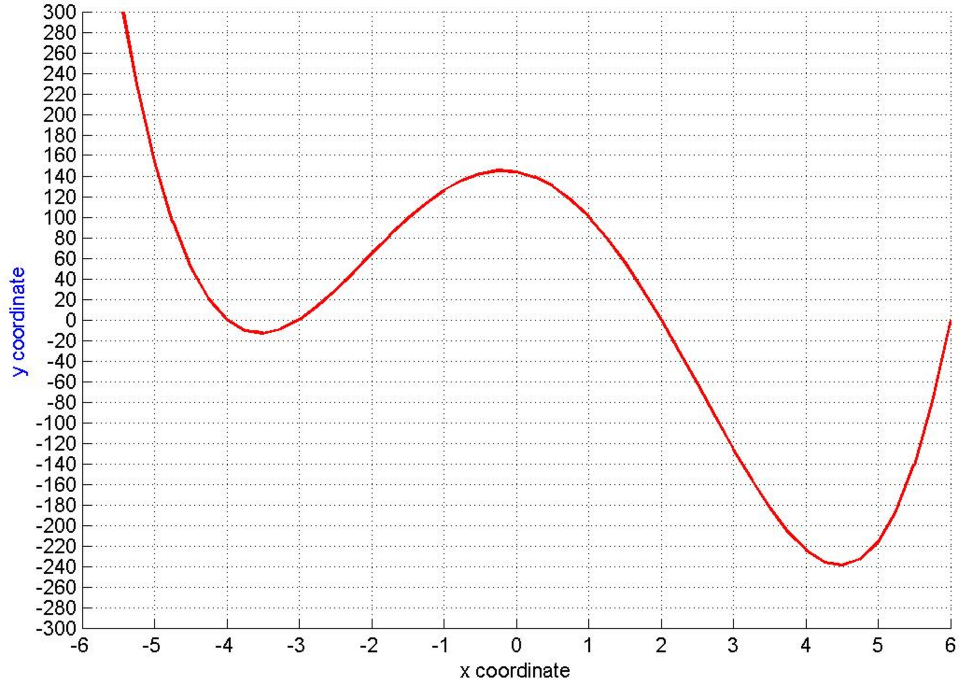
Rappelez-vous, il ya deux essais à $x = 1$.
Depuis $f(1) = 1$, puis $f(1)$ existe.
Aussi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Ainsi $f(x)$ est continue en $x = 1$.
Rappelez-vous, il ya deux essais à $x = 2$.
Depuis $f(2) = 1$, puis $f(2)$ existe.
Cependant, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Ainsi $f(x)$ est discontinue en $x = 2$.

Définition 4.1, un polynôme est une fonction f définie par
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ où n est un non-négatif nombre entier et chaque a_i est un nombre réel.

Théorème. Un fonction polynomiale est continue à tous les points.

Exemple 4: Examiner la continuité de $f(x) = x^4 - x^3 - 32x^2 - 12x + 144$.
$f(x)$ est continue pour tous $-\infty < x < \infty$.

Plot of f(x)=x^4-x^3-32x^2-12x+144



Le Théorème de Continuité: Si f et g sont des fonctions continues à $x = a$,
puis les fonctions suivantes sont continues en $x = a$:
(i) $f(x) + g(x)$
(ii) $c \cdot f(x)$ où c est une constante
(iii) $f(x) \cdot g(x)$
(iv) $\frac{f(x)}{g(x)}$ à condition que $g(a) \neq 0$.

Exercices

Trouvez toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction donnée est continue.

1. $f(x) = 7 - 3x$
2. $g(x) = x^2 + 1$
3. $h(x) = \frac{3x}{x^2 - x - 6}$
4. $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$
5. $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \text{ n'est pas un nombre entier} \\ 1 & \text{si } x \text{ est un nombre entier} \end{cases}$
6. $h(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}$