Calcul I, Leçon 3 - Limites

Voici les réponses aux exercices

1. $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 3x\right) = \lim\limits_{x \to 2} \left(x^2\right) + \lim\limits_{x \to 2} (3x) = 4 + 6 = 10$

2. $\lim\limits_{h \to 1} \frac{h^3}{h-2} = \frac{\lim\limits_{h \to 1} h^3}{\lim\limits_{h \to 1} h^3} = \frac{1}{-1} = -1$

3. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2-5h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(h-5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h-5) = -5$

4. $\lim\limits_{x \to 0} (3x-2)\left(x^2+7\right) = \left(3\left(\lim\limits_{x \to 0} (x)\right) - \left(\lim\limits_{x \to 0} 2\right)\right)\left(\left(\lim\limits_{x \to 0} x^2\right) + \left(\lim\limits_{x \to 0} 7\right)\right)$
$= (3 \cdot 0 - 2)(0+7) = -14$

Trouvez l'équation de la tangente à la courbe de la fonction donnée au point indiqué.

5. $y = f(x) = x^2 - 5x$, au point de $x = 3$ et $y = f(3) = -6$.
$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left((a+h)^2-5(a+h)\right)-\left(a^2-5a\right)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(a^2+2ah+h^2-5a-5h\right)-\left(a^2-5a\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2ah+h^2-5h}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(h+2a-5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h+2a-5) = 2a-5 = 2(3)-5 = 1.$
Puis $y - y_0 = m(x - x_0)$ équivaut à $y - (-6) = 1(x-3)$, donc $y = x - 9$.

6. $y = f(x) = 2x - 3x^2$, au point de $x = 1$ et $y = f(1) = -1$.
$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(2(a+h)-3(a+h)^2\right)-\left(2a-3a^2\right)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left((2a+2h)-\left(3a^2+6ah+3h^2\right)\right)-\left(2a-3a^2\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2h-6ah-3h^2}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(-3h-6a+2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-3h-6a+2) = -6a+2 = -6(1)+2 = 4$
Puis $y - y_0 = m(x - x_0)$ équivaut à $y - (-1) = 4(x-1)$, donc $y = 4x - 5$.

7. $y = f(x) = x - 2x^2 + 6$, au point de $x = 2$ et $y = f(2) = 0$.
$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left((a+h)-2(a+h)^2+6\right)-\left(a-2a^2+6\right)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left((a+h)-\left(2a^2+4ah+2h^2\right)+6\right)-\left(a-2a^2+6\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(h-4ah-2h^2\right)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{h(1-4a-2h)}{h}\right) = \lim\limits_{h \to 0} (1-4a-4h) = 1-4a = 1-4(2) = -7$
Puis $y - y_0 = m(x - x_0)$ équivaut à $y - (0) = -7(x-2)$, donc $y = -7x + 14$.

8. $y = f(x) = \sqrt{x}$, au point de $x = 1$ et $y = f(1) = 1$.
$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(a+h-a)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$
Puis $y - y_0 = m(x - x_0)$ équivaut à $y - (1) = \frac{1}{2}(x-1)$, donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.