Calcul I, Leçon 3 - Théorème de la Limite

Le Théorème de la Limite fera le calcul des limites simples.

Le Théorème de la Limite: Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe avec $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, puis
(i) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$ et $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$
(ii) $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot L$ où c est une constante
(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = LM$
(iv) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ à condition que $M \neq 0$.

Exemple 1. Trouvez $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ quand $f(x) = x^2 + 3$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(x^2 + 3\right) = \lim\limits_{x\to a} x \cdot \lim\limits_{x\to a} x + \lim\limits_{x\to a} 3$.
Depuis $\lim\limits_{x\to a} x = a$ et $\lim\limits_{x\to a} 3 = a$, puis $\lim\limits_{x\to a} \left(x^2 + 3\right) = a^2 + 3$.

Exemple 2. Trouvez $\lim\limits_{h\to 0} f(h)$ quand $f(h) = \frac{4h^2+3h}{h}$.
Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{4h^2+3h}{h}$.
Depuis $\frac{4h^2+3h}{h} = \frac{h(4h+3)}{h} = 4h + 3$, puis
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{4h^2+3h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 4h + 3 = 4 \cdot \lim\limits_{h\to 0} h + \lim\limits_{h\to 0} 3$.
Depuis $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} 3 = 3$, puis $\lim\limits_{h\to 0} \frac{4h^2+3h}{h} = 4(0) + 3 = 3$.

Exemple 3. Trouvez $\lim\limits_{h\to 1} f(h)$ quand $f(h) = \frac{4h^2}{h+5}$.
Ainsi $\lim\limits_{h\to 1} f(h) = \lim\limits_{h\to 1} \frac{4h^2}{h+5}$.
Depuis $\lim\limits_{h\to 1} (h + 5) = \lim\limits_{h\to 1} h + \lim\limits_{h\to 1} 5 = 1 + 5 = 6 \neq 0$ puis
$\lim\limits_{h\to 1} \frac{4h^2}{h+5} = \frac{\lim\limits_{h\to 1} 4h^2}{\lim\limits_{h\to 1} (h+5)} = \frac{4 \cdot \lim\limits_{h\to 1} h^2}{\lim\limits_{h\to 1} (h+5)} = \frac{4 \cdot \lim\limits_{h\to 1} h^2}{6} = \frac{4 \cdot \lim\limits_{h\to 1} h \cdot \lim\limits_{h\to 1} h}{6} = \frac{4(1)(1)}{6}$.
Ainsi $\lim\limits_{h\to 1} \frac{4h^2}{h+5} = \frac{4(1)(1)}{6} = \frac{4}{6}$.

Exemple 4.
Trouvez une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2 + 1$ au point de $(3, 10)$.
Vous vous souvenez peut revenir dans la leçon sur les tangentes que la pente au point de $x = a$ et $y = f(a)$ sur un graphique a été déterminé par l'équation $m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que nous laissons h deviennent plus petits et plus petits. C'est mathématiquement équivalent à dire $m = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Ainsi, quand $a = 3$, puis $m = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left((a+h)^2+1\right)-\left(a^2+1\right)}{h}$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{\left(a^2+2ah+1\right)-\left(a^2+1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah}{h} = \lim_{h\to 0} 2a = 2a = 2\,(3) = 6.$$

Enfin, pour terminer la résolution de ce problème, vous aurez besoin de rappeler que la équation de la ligne droite de pente m qui passe par le point (x_0, y_0) est $y - y_0 = m\,(x - x_0)$. Donc, si $m = 6$, alors l'équation de la tangente est $y - 10 = 6\,(x - 3)$, ou $y = 6x - 8$.

Exercices

Utilisez le Théorème de la Limite pour calculer les limites indiquées.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 + 3x\right)$
2. $\lim\limits_{h\to 1} \frac{h^3}{h-2}$
3. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2-5h}{h}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} (3x-2)\left(x^2+7\right)$

Trouvez l'équation de la tangente à la courbe de la fonction donnée au point indiqué.

5. $y = f\,(x) = x^2 - 5x$, à $(3, -6)$
6. $y = f\,(x) = 2x - 3x^2$, à $(1, -1)$
7. $y = f\,(x) = x - 2x^2 + 6$, à $(2, 0)$
8. $y = f\,(x) = \sqrt{x}$ à $(1, 1)$