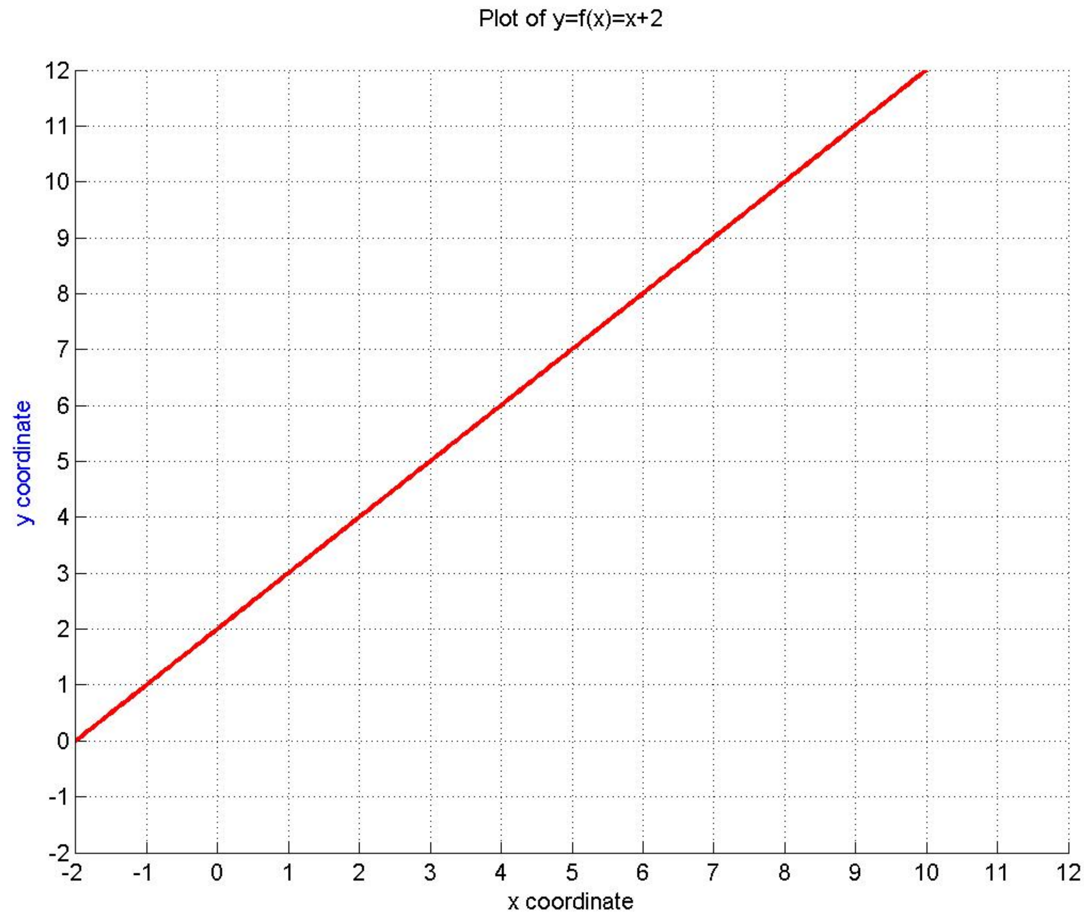
Calcul I, Leçon 2 - Limites

Nous avons appris dans la leçon 1 que la pente de la tangente à la courbe de $y = f(x)$ consiste à trouver m quand $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ comme h devient plus petit et plus petit. Depuis la division par le nombre 0 n'est pas autorisée (ou pourrait-on dire que division par le nombre 0 n'est pas défini en mathématiques), nous pouvons redéfinir pente d'une manière différente. On pourrait dire que la pente de la tangente à la courbe de $y = f(x)$ consiste à trouver m quand $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ comme h s'approche de 0, mais jamais égal à 0!

Maintenant nous sommes prêts à introduire un nouveau terme, limite. On redéfinira que la pente de la tangente à la courbe de $y = f(x)$ est égal à m quand m est égal à la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ comme h se rapproche de 0. Nous pouvons écrire ce que l'expression $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et il sera toujours le même sens. Il s'agit d'un exemple spécifique du processus de limite. Par conséquent, nous allons consacrer cette leçon à l'étude des limites.

Supposons que $f(x)$ devient arbitrairement proche de le nombre L comme x tend vers a. Nous exprimons cela en écrivant $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, où L est appelée la limite. Il est important de se rappeler que nous ne permettons pas x à égaler a! Nous ne pouvons permettre que x à devenir très, très près de a.
C'est dans cet esprit, regardons quelques exemples:

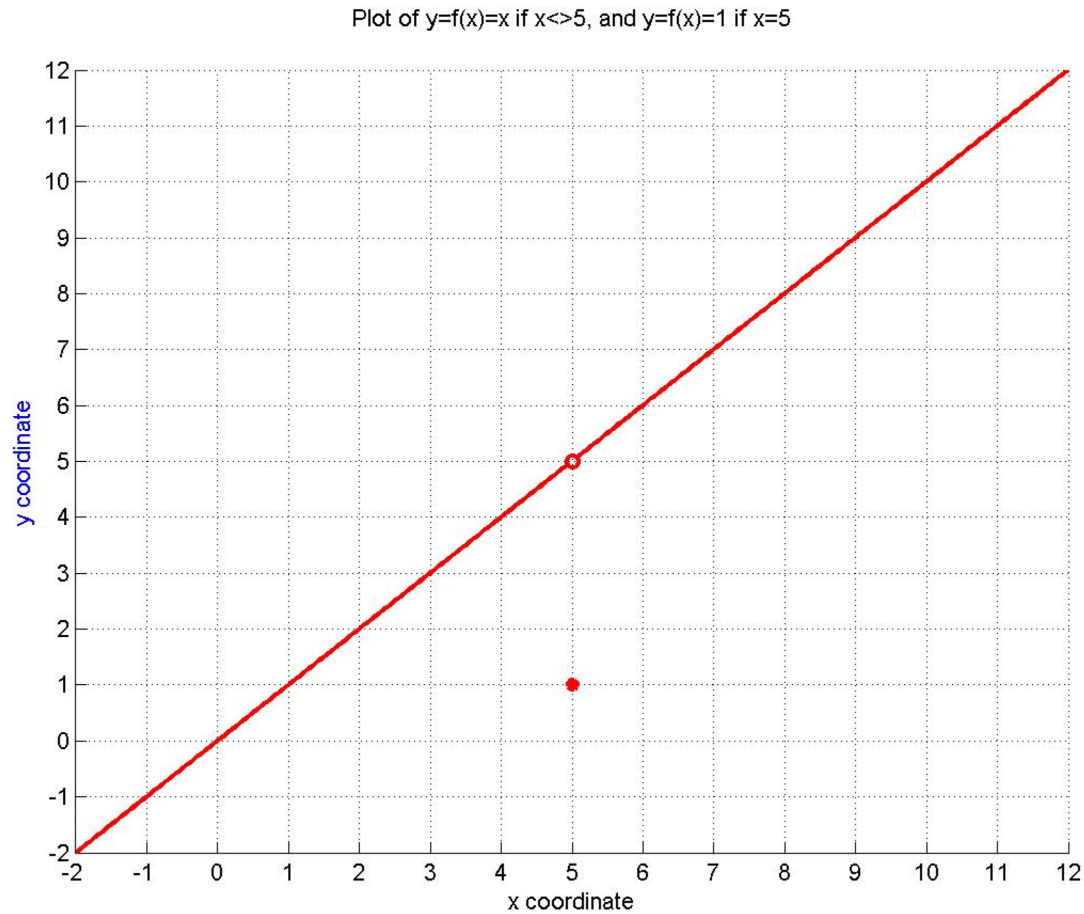
Exemple 1. Trouvez $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ quand $f(x) = x + 2$ et $a = 4$.
Ainsi nous sommes invités à trouver L quand $\lim\limits_{x \to 4} (x + 2)$.
Si vous étiez à la représenter graphiquement $f(x)$ contre x, vous verriez que $f(x) = x + 2$ est à proximité de 6 quand x est à proximité 4.



Pouvez-vous imaginer que, comme x se rapproche et plus proche de 4 (sans jamais égaler 4), que $f(x)$ se rapproche et plus proche de 6?

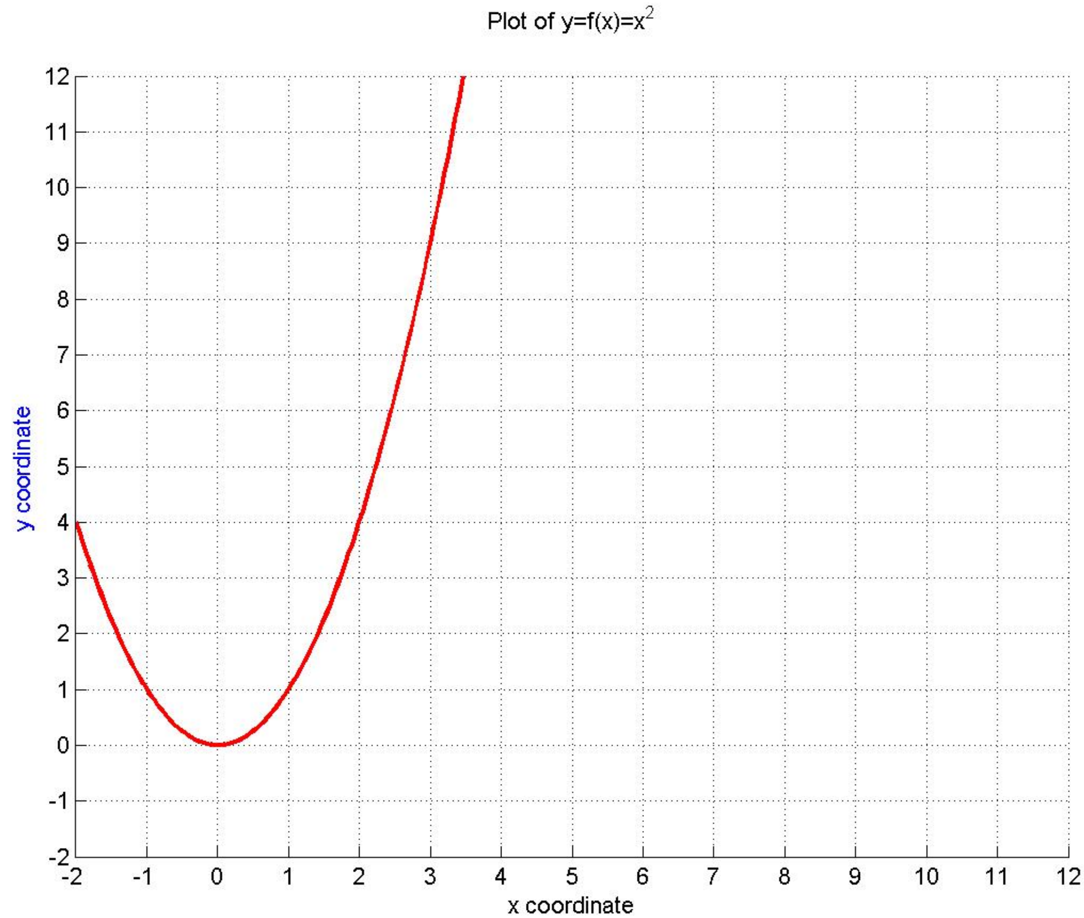
Ainsi $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}(x+2) = 6$.

Exemple 2. Trouvez $\lim_{x\to a} f(x) = L$ quand $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 5 \\ 1 & \text{si } x = 5 \end{cases}$ et $a = 5$.
Ainsi nous sommes invités à trouver L. Notez que si nous étions permettre à x égaler 5, puis $f(x)$ prendrait la valeur 1. Toutefois, par la définition de la limite, nous ne permettent que x obtenir près de 5. Nous ne permettons pas x égale à 5! Si vous étiez à la représenter graphiquement $f(x)$ contre x, vous verriez que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 5 \\ 1 & \text{si } x = 5 \end{cases}$ est à proximité de 5 quand x est à proximité 5.



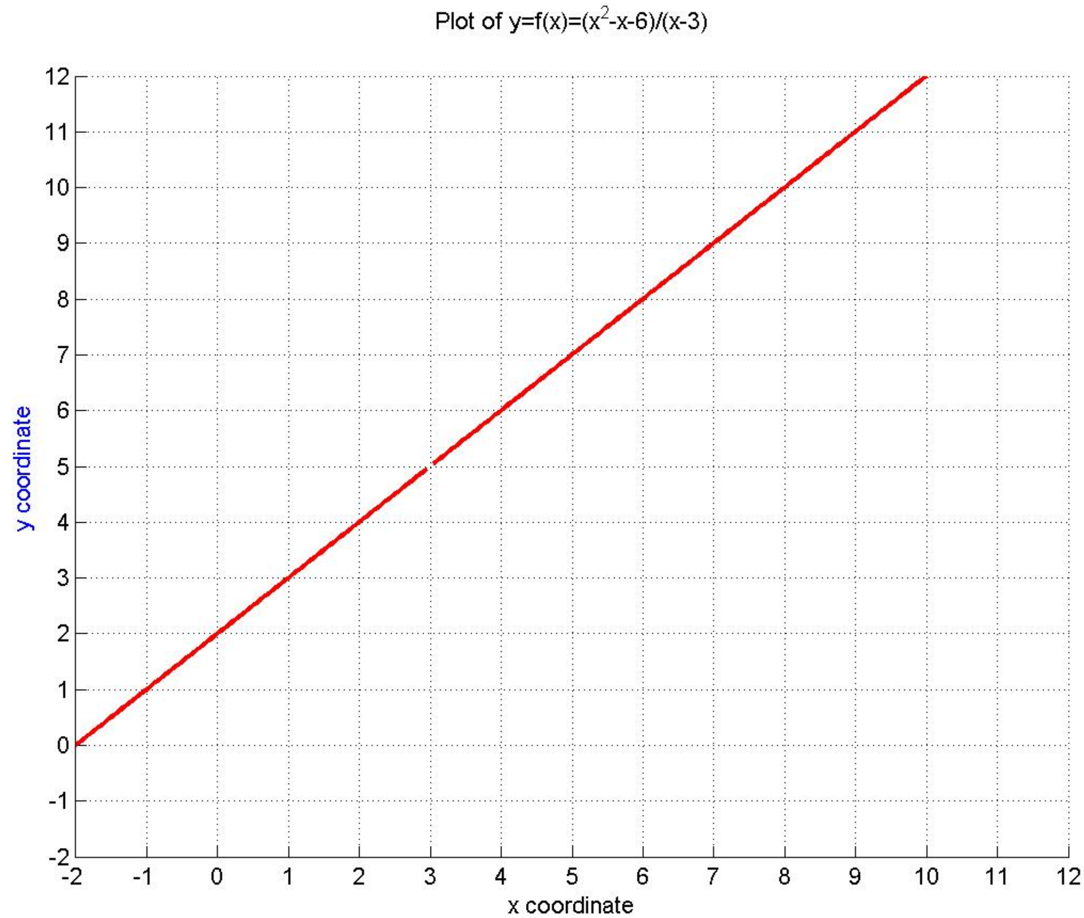
Ainsi $\lim_{x\to 5} f(x) = 5$.

Exemple 3. Trouvez $\lim_{x\to a} f(x) = L$ quand $f(x) = x^2$ et $a = -1$.
Ainsi nous sommes invités à trouver L quand $\lim_{x\to -1} x^2$.
Si vous étiez à la représenter graphiquement $f(x)$ contre x, vous verriez que $f(x) = x^2$ est à proximité de 1 quand x est à proximité -1.



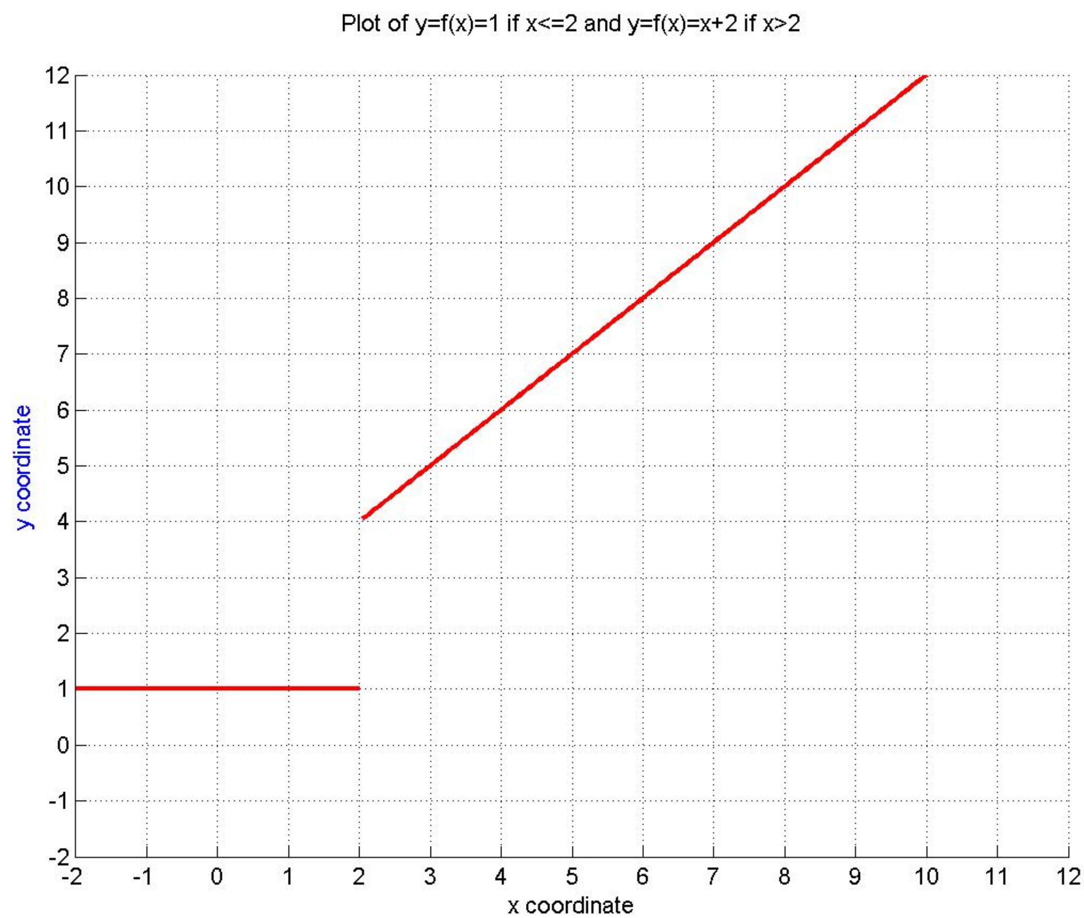
Ainsi $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$.

Exemple 4. Trouvez $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quand $f(x) = \left(x^2 - x - 6\right) / (x - 3)$ et $a = 3$.
Ainsi nous sommes invités à trouver L quand $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.
Vous pourriez graphique présente pour voir ce qui arrive, mais il est beaucoup plus simple à réaliser un peu d'algèbre.
Depuis $f(x) = \left(x^2 - x - 6\right) / (x - 3) = (x - 3)(x + 2) / (x - 3)$, et puisque nous n'avons jamais permettre à $x = 3$, (ainsi $(x - 3)$ n'a jamais égal à zéro), nous pouvons annuler les deux termes $(x - 3)$ dans le numérateur et le dénominateur.
Cela nous laisse avec ce qui suit $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 3 \\ \text{aucune valeur} & \text{si } x = 3 \end{cases}$.
Si vous étiez à la représenter graphiquement $f(x)$ contre x, vous verriez que $f(x) = x + 2$ est à proximité de 5 quand x est à proximité 3.



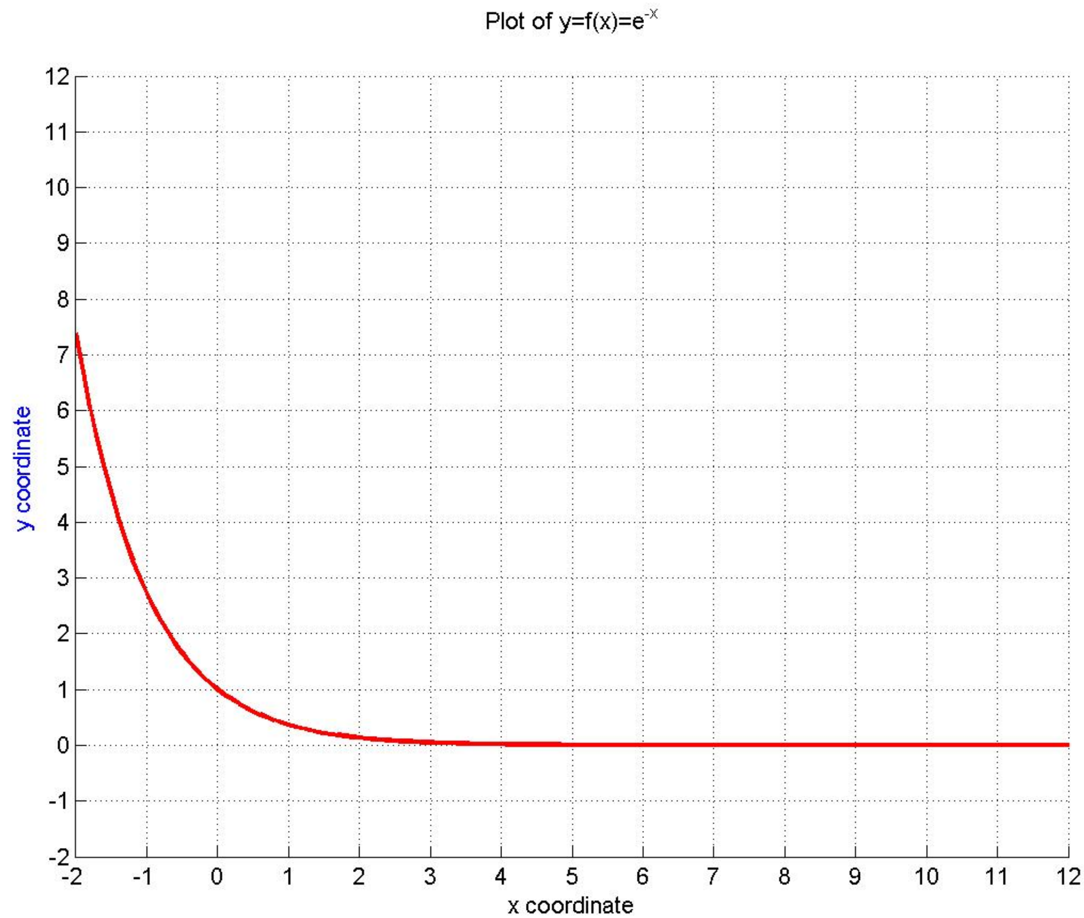
Ainsi $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Exemple 5. Trouvez $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quand $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ et $a = 2$.
Ainsi nous sommes invités à trouver L. Notez que si nous étions permettre à x égaler 2, puis $f(x)$ prendrait la valeur 1. Toutefois, par la définition de la limite, nous ne permettent que x obtenir près de 2. Nous ne permettons pas x égale à 2! Si vous étiez à la représenter graphiquement $f(x)$ contre x, vous verriez que si nous approcher $x = 2$ à partir de la gauche, la valeur de $f(x) = 1$, et
si nous approcher $x = 2$ à partir de la droite, la valeur de $f(x) = 4$.



Par conséquent, car une fonction ne peut jamais avoir deux limites différentes au même point, pour $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leq 2\\ x+2 & \text{si } x>2\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$ n'existe pas!

Exemple 6. Trouvez $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=L$ quand $f\left(x\right)=e^{-x}$ et $a=\infty$.
Ainsi nous sommes invités à trouver L quand $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$.
Si vous étiez à la représenter graphiquement $f\left(x\right)$ contre x, vous verriez que $f\left(x\right)=e^{-x}$ est à proximité de 0 quand x est à proximité ∞.



Ainsi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercices

Trouver la limite, ou de déclarer qu'il n'existe pas.

1. $\lim\limits_{x\to 0} 2x+1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+5x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x^2-8x}{x-8}$
4. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \mid x \mid$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+1}{x}$